模块一 立体图形的结构探究

第 1 节 几何体的表面积与体积（★★）

内容提要

本节涉及空间几何体的表面积和体积计算，下面先梳理一些必备公式.

1．多面体的表面积与体积（表面积即各个面的面积之和，没有统一的公式）

①棱锥的体积：$V=\frac{1}{3}Sh$；②棱柱的体积：$V=Sh$；③棱台的体积：$V=\frac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h$.

2．旋转体的表面积与体积

①圆柱：如图 1，体积 $V=Sh=\pi r^2h$，侧面积 $S_{侧}=2\pi rh$，表面积 $S=2\pi rh+2\pi r^2$；

②圆锥：如图 2，体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$，侧面积 $S_{侧}=\pi rl$，表面积 $S=\pi rl+\pi r^2$；

③圆台：如图 3，体积 $V=\frac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h=\frac{\pi}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)h$，侧面积 $S_{侧}=\pi(r_1+r_2)l$；

表面积 $S=\pi(r_1+r_2)l+\pi r_1^2+\pi r_2^2$；

④球：如图 4，体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，表面积 $S=4\pi R^2$.

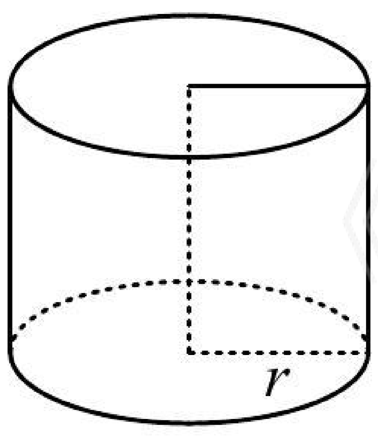


图1

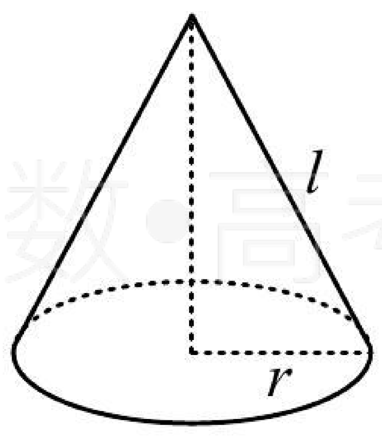


图2

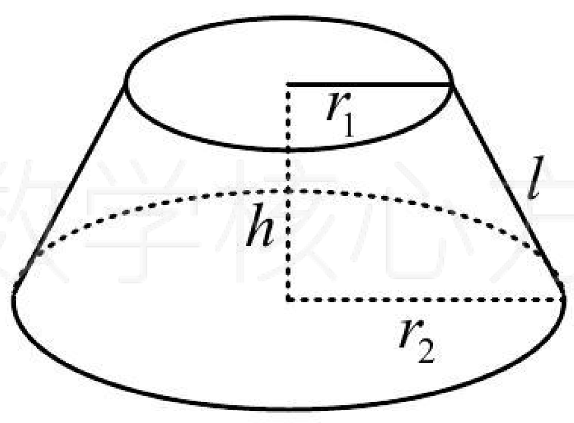


图3

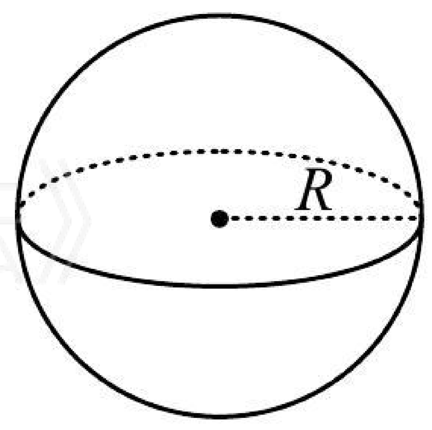


图4

典型例题

类型Ⅰ：简单几何体的表面积与体积

【例 1】底面积为 2π，侧面积为 6π 的圆锥的体积是（　　）

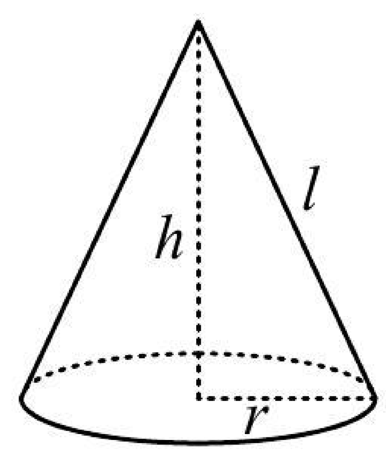
（A）8π　　（B）$\frac{8\pi}{3}$　　（C）2π　　（D）$\frac{4\pi}{3}$

解析：要算圆锥体积，已有底面积，只需求出高，可由所给条件建立关键参数的方程组，

如图，圆锥的底面积 $S=\pi r^2=2\pi\Rightarrow r=\sqrt{2}$，圆锥的侧面积 $S'=\pi rl=\sqrt{2}\pi l=6\pi\Rightarrow$ 母线长 $l=3\sqrt{2}$，

所以圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=4$，故体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times2\pi\times4=\frac{8\pi}{3}$.

答案：B



【例 2】(2023 ·全国甲卷)在三棱锥 $P-ABC$ 中，ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，$PA=PB=2$，$PC=\sqrt{6}$，则该棱锥的体积为（　　）

（A）1　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）3

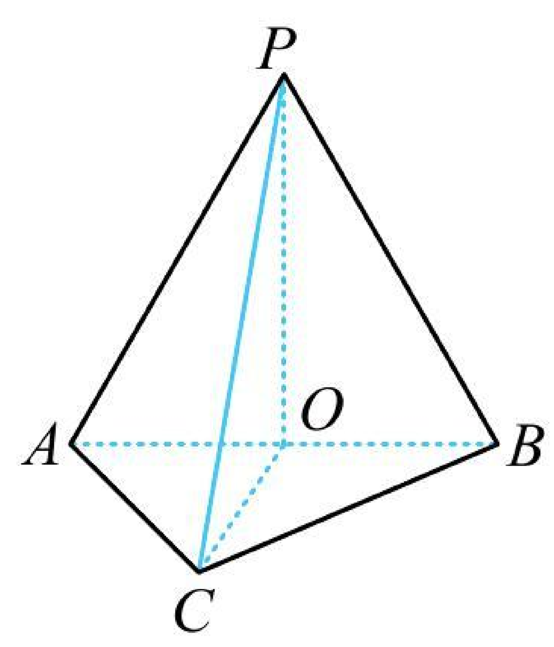
解析：以 ΔABC 为底面，求体积还差高，故需过 P 作面 ABC 的垂线，那垂足在哪儿呢？由于 ΔABP 和 ΔABC 都是正三角形，常见的作辅助线方法是取公共底边 AB 的中点 O，即可找到高，

如图，取 AB 中点 O，连接 OC，OP，则 $AB\perp OP$，

由所给数据可求得 $OP=OC=\sqrt{3}$，又 $PC=\sqrt{6}$，所以 $OP^2+OC^2=6=PC^2$，故 $PO\perp OC$，

结合 $PO\perp AB$ 可得 $PO\perp$ 平面 ABC，故 PO 是高，所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin60^{\circ}\times\sqrt{3}=1.$

答案：A



【反思】①有时求体积的参数（例如本题的高）需要我们自己作出来；②本题的模型很常见，我们一般称之为“双等腰三角形模型（两个等腰 ΔABP 和 ΔABC 共用底边 AB）”．取公共底边中点，构造与底边垂直的截面（如本题的截面 POC），是这一模型中常用的添加辅助线的方法. 即使本题改变 PC 的长，使 PO 与 OC 不垂直，过 P 作面 ABC 的垂线，垂足也一定落在直线 OC 上. 后续还会多次遇见该模型.

【例 3】(2022 • 新高考Ⅰ卷）南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为 140.0km^2；水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为 180.0 km^2. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为（　　）（$\sqrt{7}\approx2.65$）

（A）$1.0\times10^9\text{m}^3$　　（B）$1.2\times10^9\text{m}^3$　　（C）$1.4\times10^9\text{m}^3$　　（D）$1.6\times10^9\text{m}^3$

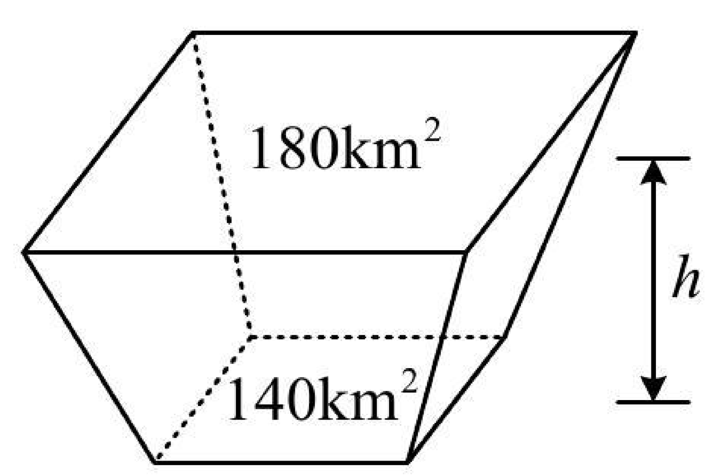
解析：算棱台的体积，代公式即可，先找到 S 和 S'，以及棱台的高 h，

如图，该棱台的两个底面面积分别为 $S=140\text{km}^2$，$S'=180\text{km}^2$，高 $h=157.5-148.5=9\text{m}=9\times10^{-3}\text{km}$，

所以棱台的体积 $V=\frac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h=\frac{1}{3}\times(140+180+\sqrt{140\times180})\times9\times10^{-3}\text{km}^3$

$=3\times(320+60\sqrt{7})\times10^{-3}\text{km}^3\approx3\times(320+60\times2.65)\times10^{-3}\text{km}^3=1.437\text{km}^3\approx1.4\times10^9\text{m}^3$.

答案：C

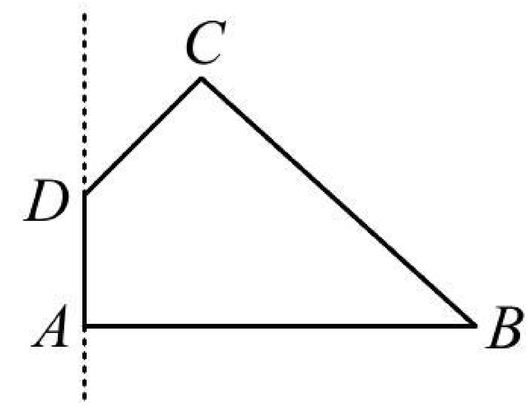


【总结】对于简单几何体的表面积与体积，把该几何体的关键参数代入内容提要对应公式计算即可.

类型Ⅱ：组合体的表面积与体积

【例 4】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp AB$，$\angle ADC=135^\circ$，$AB=3$，$CD=\sqrt{2}$，$AD=1$，则四边形 $ABCD$ 绕 AD 旋转一周所成几何体的表面积为（　　）

（A）$(6+4\sqrt{2})\pi$　　（B）$(9+4\sqrt{2})\pi$　　（C）$(9+9\sqrt{2})\pi$　　（D）$(9+10\sqrt{2})\pi$



解析：原图形绕 AD 旋转一周得到的几何体如图，它是一个圆台在上方挖去了一个圆锥后余下的部分，该组合体的表面积由三部分构成，下方的圆，中间圆台的侧面，上方挖去的圆锥的侧面，需分别计算，

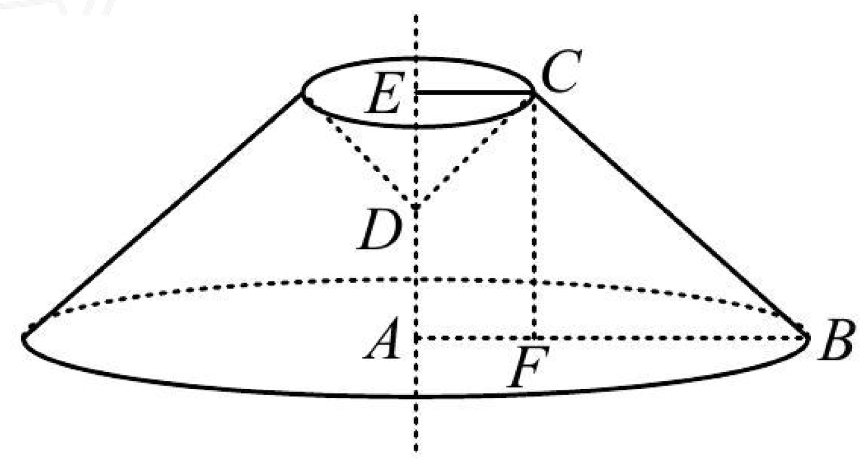
由题意，$\angle CDE=180^\circ-\angle ADC=45^\circ$，所以 $CE=DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CD=1$，$AF=1$，$BF=AB-AF=2$，

$CF=AE=AD+DE=2$，$BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

图中圆 A 的面积为 $S_1=\pi\times 3^2=9\pi$，圆台的侧面积 $S_2=\pi(CE+AB)\cdot BC=\pi(3+1)\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}\pi$，

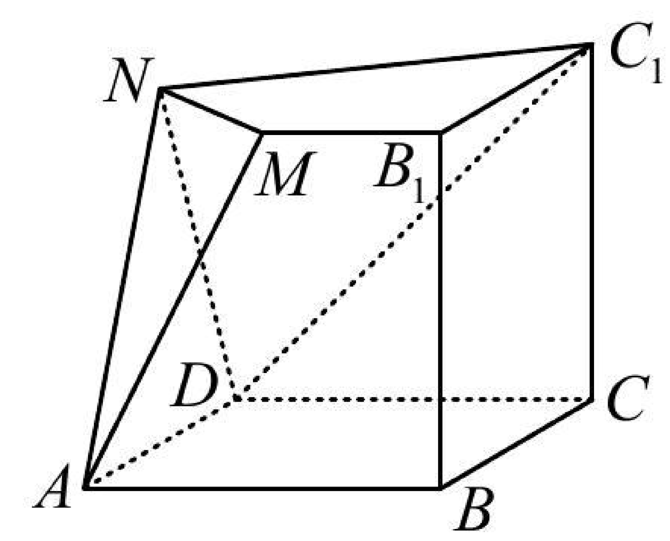
上方挖去的圆锥的侧面积 $S_3=\pi\cdot CE\cdot CD=\sqrt{2}\pi$，故所求表面积为 $S_1+S_2+S_3=(9+9\sqrt{2})\pi$.

答案：C



【例 5】如图是一个棱长为 2 的正方体被过棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点 M，N，顶点 A 和过点 N，顶点 D，C_1 的两个截面截去两个角后所得的几何体，则该几何体的体积为（　　）

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8



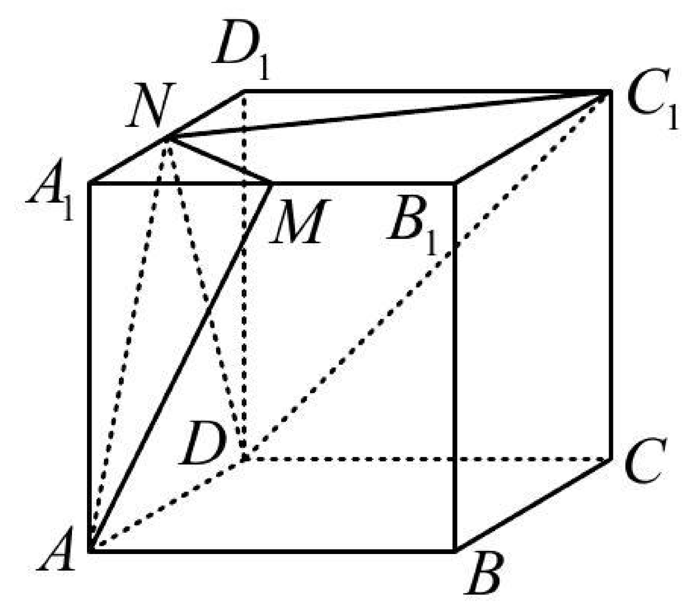
解析：所给几何体由正方体截得，故先画出完整的正方体，再看怎样算体积，

如图，截去的部分是三棱锥 $A-A_1MN$ 和 $D-C_1D_1N$，正方体的体积 $V=2^3=8$，

$V_{A-A_1MN}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta A_1MN}\cdot AA_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times 2=\dfrac{1}{3}$，$V_{D-C_1D_1N}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta C_1D_1N}\cdot DD_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\times 2=\dfrac{2}{3}$，

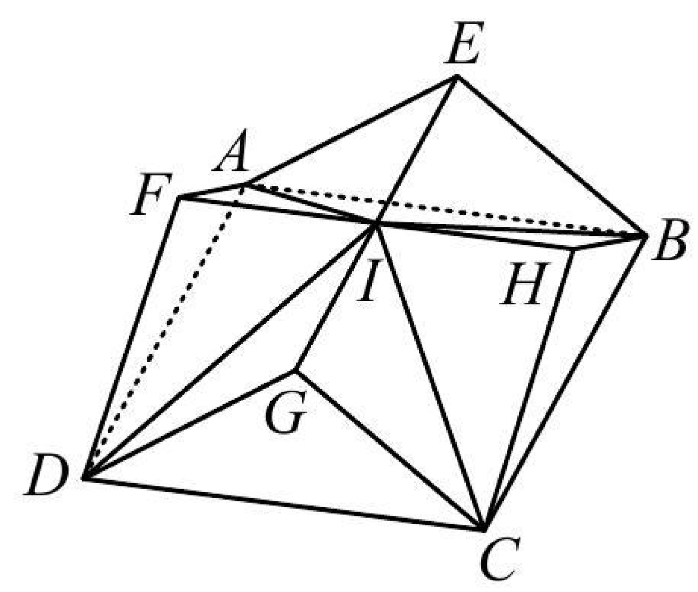
故所求几何体的体积为$8-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=7$.

答案：C



【例 6】如图，某多面体是由两个直三棱柱重叠后而成，重叠后的底面为正方形，直三棱柱的底面是顶角为120°，腰为 3 的等腰三角形，则该多面体的体积为（　　）

（A）23　（B）24　（C）26　（D）27



解析：多面体可看成由五部分组成：正四棱锥$I-ABCD$，四个全等的三棱锥$I-CDG$，$I-ABE$，$I-ADF$，$I-BCH$. 先算正四棱锥的体积，求底面积要用 BC，可在ΔBHC中用余弦定理来求，

$BC^2=BH^2+CH^2-2BH\cdot CH\cdot\cos\angle BHC=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos120^{\circ}=27\Rightarrow S_{ABCD}=BC^2=27$，

再算高，注意到 FH // 平面 $ABCD$，所以 I 到平面 $ABCD$ 的距离等于 H 到平面 $ABCD$ 的距离，

如图，取 BC 中点 K，连接 HK，则$HK\perp BC$，又$BHC-AFD$为直三棱柱，所以$CD\perp$平面 BHC，

故$CD\perp HK$，所以$HK\perp$平面 $ABCD$，$HK=CH\cdot\sin\angle HCK=3\sin30^{\circ}=\frac{3}{2}$，

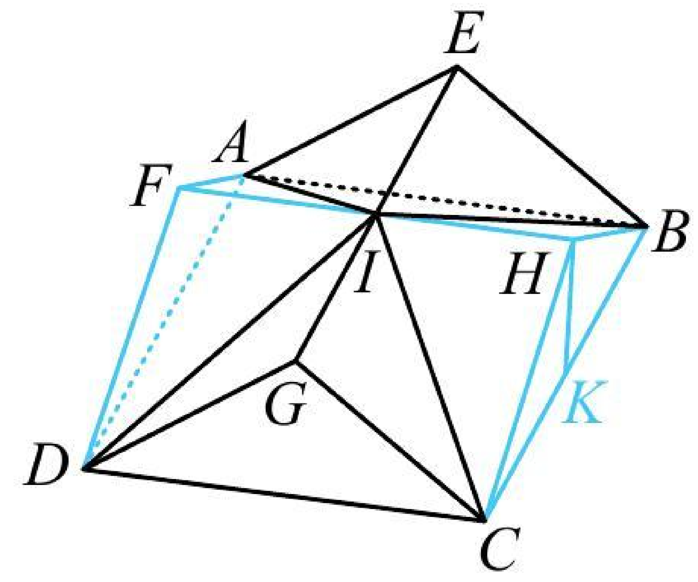
即正四棱锥$I-ABCD$的高为$\frac{3}{2}$，所以$V_{I-ABCD}=\frac{1}{3}\times27\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}$；

再求三棱锥$I-CDG$的体积，这部分天然就有$IG\perp$平面 CDG，

$V_{I-CDG}=\frac{1}{3}S_{\Delta CDG}\cdot IG=\frac{1}{3}S_{\Delta CDG}\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin120^{\circ}\times\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}=\frac{27}{8}$，

所以整个几何体的体积$V=V_{I-ABCD}+4V_{I-CDG}=\frac{27}{2}+4\times\frac{27}{8}=27$.

答案：D

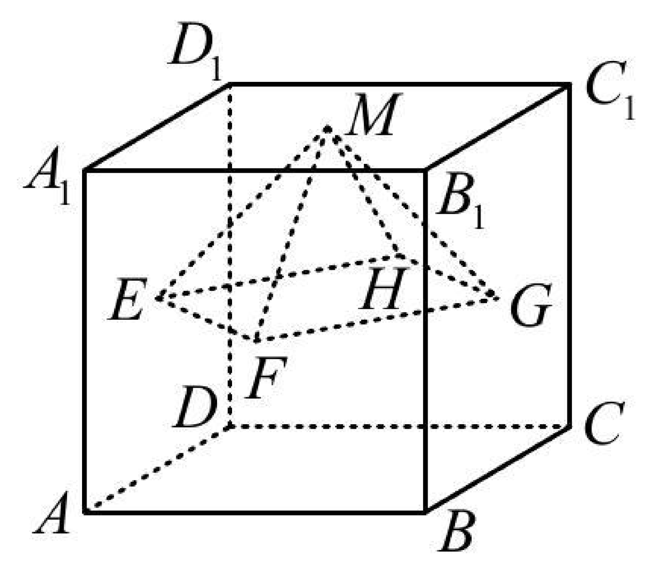


【总结】对于组合体，不管是求表面积还是体积，都只需弄清楚它的组成方式，再分别计算即可.

强化训练

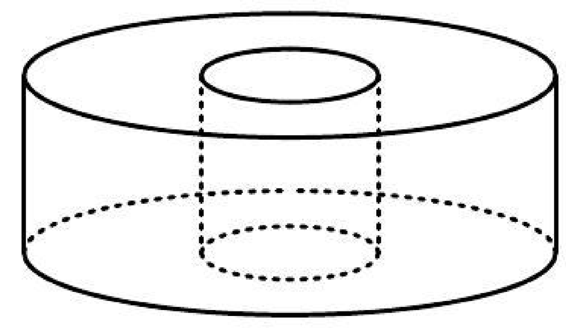
1．（2022·上海卷·★）已知圆柱的高为4，底面积为9π，则圆柱的侧面积为_____.

2．（2018·天津卷·★★）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，除面$ABCD$外，该正方体其余各面的中心分别为点E，F，G，H，M（如图），则四棱锥$M-EFGH$的体积为_____.



3．（2023·武汉模拟·★★）某车间需要对一个圆柱形工件进行加工，该工件底面半径为15cm，高10cm，加工方法为在底面中心处打一个半径为$r$cm的且和原工件有相同轴的圆柱形通孔，如图，若要求工件加工后的表面积最大，则r的值应设计为（　　）

（A）$\sqrt{10}$　（B）$\sqrt{15}$　（C）4　（D）5



4．（2021·新高考Ⅱ卷改编·★★★）正四棱台的上、下底面的边长分别为2，4，侧棱长为2，则其体积为_____；侧面积为_____.

5．（2022 • 天津模拟 • ★★★）两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为S_1和S_2，体积分别为V_1和V_2，若$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{2}$，则$\dfrac{V_1}{V_2}=$（　　）

（A）$\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$　　（B）$\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$　　（C）$\dfrac{9}{4}$　　（D）$\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$

6.（2023 •湖南娄底模拟 •★★★）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$底面ABC，$AB=BC=AC=AA_1$，点 D 是棱AA_1上的点，且$AA_1=4AD$，若截面BDC_1分这个棱柱为上、下两部分，则上、下两部分的体积比为（　　）

（A）$1:2$　　（B）$4:5$　　（C）$4:9$　　（D）$5:7$